

# 비균일 레일리 페이딩 채널에서 PEXIT 분석을 활용한 LDPC 부호 설계

정 홍 재\*, 김 재 원<sup>o</sup>

## Construction of LDPC Codes for Non-Uniform Rayleigh Fading Channels Using PEXIT Analysis

Hong-Jae Jeong\*, Jae-Won Kim<sup>o</sup>

### 요 약

본 논문에서는 비균일 레일리 페이딩 채널에서의 저밀도 패리티 검사(low-density parity-check, LDPC) 부호 설계 알고리즘을 제안한다. 구체적으로, 프로토타입 외부 정보 전송(protograph extrinsic information transfer, PEXIT) 분석과 차등 진화(differential evolution, DE) 알고리즘을 활용하여 복호 임계값(decoding threshold)이 우수한 프로토타입(protograph)을 설계한다. 일반적으로 페이딩 채널의 페이딩 계수(fading factor)가 고정되면 신호의 크기가 변형된 가산성 가우시안 백색 잡음(additive white Gaussian noise, AWGN) 채널과 같아진다. 고정되지 않는다면 레일리 페이딩 분포에 따른 다수의 페이딩 계수의 수만큼 PEXIT 분석의 중간 계산을 수행하고 평균을 내어 복호 임계값을 계산할 수 있다. 하지만 다수의 페이딩 계수를 활용하면 복잡도 측면에서 차등 진화 알고리즘을 사용하는 것이 불가능하다. 이에 본 논문에서는 차등 진화 알고리즘에서 적은 수의 페이딩 계수를 활용하여 알고리즘을 경량화하고 마지막 단계에서 다수의 페이딩 계수를 활용하여 복호 임계값이 정확하고 우수한 프로토타입을 설계한다. 제안하는 부호 설계 알고리즘이 효과적임을 다양한 부호율(code rate)에서 복호 임계값과 프레임 오류율(frame error rate, FER)을 통해 확인한다.

**키워드** : 레일리 페이딩 채널, 비균일 채널, 저밀도 패리티 검사 부호, 차등 진화, 프로토타입 외부 정보 전송

**Key Words** : Differential evolution (DE), low-density parity-check (LDPC) code, non-uniform channel, protograph extrinsic information transfer (PEXIT), Rayleigh fading channel

### ABSTRACT

In this paper, we propose a low-density parity-check (LDPC) code design algorithm in non-uniform Rayleigh fading channels. Specifically, protographs with superior decoding thresholds are designed using a protograph extrinsic information transfer (PEXIT) analysis algorithm and a differential evolution (DE) algorithm. In general, a fading channel is the same as an additive white Gaussian noise (AWGN) channel in which the size

\* 본 연구는 과학기술정보통신부 및 정보통신기획평가원의 ICT혁신인재4.0 사업의 연구결과로 수행되었습니다 (IITP-2023-RS-2022-00156409)

※ 본 연구는 삼성전자의 지원 (과제번호: MEM210728\_0001)을 받아 수행된 결과입니다

• First Author : Department of Electronic Engineering, Engineering Research Institute (ERI), Gyeongsang National University, ghdwo2875@gnu.ac.kr, 학생회원

<sup>o</sup> Corresponding Author : Department of Electronic Engineering, Engineering Research Institute (ERI), Gyeongsang National University, jaewon07.kim@gnu.ac.kr, 정회원

논문번호 : 202305-101-A-RU, Received May 17, 2023; Revised June 13, 2023; Accepted June 19, 2023

of the signal is modified for a fixed fading factor. If the fading factor is not fixed, the decoding threshold can be calculated by performing some intermediate calculations of the PEXIT analysis by the number of fading factors based on the Rayleigh fading distribution and averaging them. However, using multiple fading factors makes it impossible to utilize differential evolution algorithms in terms of computational complexity. Therefore, in this paper, we employ a small number of fading factors in differential evolution algorithms to alleviate the computational complexity in the most steps and design a protograph with an accurate and excellent decoding threshold by utilizing a large number of fading factors in the final step. Results on decoding thresholds and frame error rates (FERs) in various code rates show that the proposed design algorithm is effective for non-uniform Rayleigh fading channels.

## I. 서 론

최근 몇 년간 기술의 발전에 따라 통신시스템에서 전송되는 데이터의 양이 급격하게 증가하며, 최고 속도 1T bps의 데이터 전송률을 가지는 6G 표준에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다. 하지만 통신시스템의 데이터 전송 과정에서 발생하는 잡음은 필연적으로 오류를 발생시키기 때문에 이를 해결하기 위한 오류정정부호가 개발되고 있다. 이러한 오류정정부호 중에서도 터보 부호(turbo code)<sup>[1]</sup>, BCH 부호(BCH code)<sup>[2-4]</sup>, 길쌈 부호(convolutional code)<sup>[5]</sup> 등 많은 오류정정부호가 고안되었으며, 현재는 저밀도 패리티 검사(low-density parity-check, LDPC)<sup>[6]</sup> 부호가 우수한 오류정정 능력을 인정받아 터보 부호와 함께 통신 표준뿐만 아닌 많은 애플리케이션에 사용되고 있다<sup>[7]</sup>.

저밀도 패리티 검사 부호는 1960년대 Gallager에 의해 처음 제안되었지만, 당시 하드웨어 기술은 진공관에서 트랜지스터로 교체되는 상황이었기 때문에 저밀도 패리티 검사 부호는 널리 활용되지 못하였다. 이에 저밀도 패리티 검사 부호 외에 터보 부호, 길쌈 부호 등이 주로 사용되다가 2000년대 기술의 발전으로 인해 병렬 처리가 가능해지면서 저밀도 패리티 검사 부호가 사용되기 시작하였다. 저밀도 패리티 검사 부호는 타 오류정정부호들에 비해 우수한 복호화 성능을 보이며 이론적으로 샤논 한계(Shannon limit)에 접근하는 성능을 지니 각광받게 되었다. 일레로 가산성 가우시안 백색 잡음(additive white Gaussian noise, AWGN) 채널에서 샤논의 한계에 0.0045dB밖에 차이 나지 않는 차수 분포(degree distribution)를 가지는 저밀도 패리티 검사 부호가 발견되었다<sup>[8]</sup>. 또한 저밀도 패리티 검사 부호는 샤논 한계에 근접할 뿐만 아니라 고속 연산, 좋은 비트 및 프레임 오류율(bit/frame error rate, BER/FER), 낮은 복호 복잡도의 장점이 있으며 5G New Radio (NR)를 비롯한 다양한 통신환경과 solid state drive (SSD)

같은 저장매체에서도 활용되고 있다.

비균일(non-uniform) 채널에서는 한 부호 내에서 전송되는 비트들이 서로 다른 채널 상황을 겪으며 이는 많은 애플리케이션에서 고려되는 모델이다. 특히 다중 입력 다중 출력(multi-input multi-output, MIMO) 시스템에서 이산 멀티톤(discrete multi tone, DMT) 및 직교 주파수 분할 다중화(orthogonal frequency division multiplexing, OFDM) 상황에 대응되며 이때 신호가 서로 다른 채널을 통과하며 서로 다른 잡음 정도를 지니게 된다.

보통 이론적 성능이나 모의실험을 진행할 때의 통신 환경은 이진 소실 채널(binary erasure channel, BEC)과 AWGN 채널을 가정하지만, 실제 이동통신이나 위성통신에서는 다중경로 페이딩(multipath fading) 환경을 겪게 된다. 다중경로란 신호가 산란, 회절, 반사 등으로 전파 수신에의 경로가 여러 개인 경우이며 무선 통신 링크에 영향을 주는 중요한 요인이다. 이러한 상황에서 가시선(line of sight, LOS)이 있는 경우를 라이시안(Rician) 페이딩 채널, 가시선은 존재하지 않으며 비가시선(non-line of sight, NLOS)으로만 이루어진 경우를 레일리(Rayleigh) 페이딩 채널로 흔히 묘사한다. 실제 5G 등의 OFDM 기반 이동통신 시스템에서 겪게 되는 페이딩 채널은 각 부반송파(subcarrier)에 걸쳐서 비교적 상관관계인(correlated) 채널 변수를 경험하게 되지만 세계 모바일 통신(global system for mobile communications, GSM) 표준에서 고려하는 야외 채널 모델 중 언덕 지형 상황은 상관관계가 없는(uncorrelated) 채널과 더 유사함이 알려져 있다<sup>[9]</sup>.

본 논문에서는 비균일하고 상관관계가 없는 레일리 페이딩 채널에서 프로토프래프 외부 정보 전송(protograph extrinsic information transfer, PEXIT) 분석 알고리즘<sup>[10,11]</sup>을 활용하여 복호 임계값(decoding threshold)을 계산한다. 또한, 차등 진화(differential evolution, DE)<sup>[12]</sup> 알고리즘을 사용하여 프로토프래프

기반 저밀도 패리티 검사 부호를 설계한다. 나아가 AWGN 채널과 비균일 레일리 페이딩 채널에서 다양한 부호율(code rate)에 대하여 프로토타입을 설계하고 성능을 비교 분석한다. 레일리 페이딩 채널에서 레일리 페이딩 계수(fading factor)가 하나의 값으로 고정되면 신호의 크기가 증폭/감쇠된 AWGN 채널로 해석할 수 있기 때문에 복호 임계값은 AWGN 채널에서의 PEXIT 분석 과정 중 상호 정보 계산을 페이딩 계수의 수만큼 여러 번 수행하고 평균 낸으로써 계산할 수 있다<sup>[11]</sup>. 하지만 레일리 페이딩 채널을 정확히 모사하기 위해 다수의 페이딩 계수를 활용할 경우 차등 진화 알고리즘을 통한 프로토타입 최적화에는 계산 복잡도의 측면에서 활용이 불가능하다. 따라서 본 논문에서는 적은 수의 페이딩 계수를 활용하여 최적화되 차등 진화 알고리즘의 마지막 단계에서 다수의 페이딩 계수를 활용하는 경량화된 최적화 알고리즘을 제안한다. 또한 일반적으로 균일(uniform) AWGN 채널에서 최적화된 프로토타입들이 균일 레일리 페이딩 채널에서도 우수한 복호 임계값을 보이지만 비균일 레일리 페이딩 채널에서는 그렇지 않으며 이로부터 제안하는 최적화 알고리즘이 비균일 레일리 페이딩 채널에서 효과적임을 보인다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다. II장에서는 프로토타입에 대한 정의와 비균일 레일리 페이딩 채널의 시스템 모델을 제시하고, PEXIT 분석 알고리즘을 소개한다. III장에서는 최적화 과정에 활용할 PEXIT 분석 알고리즘에 적합한 페이딩 계수의 수를 분석한다. 이를 활용하여 경량화된 최적화 기법인 차등 진화 알고리즘을 새롭게 제안하고 다양한 부호율에서 최적화된 프로토타입을 얻는다. IV장에서는 다양한 부호율에 대해 균일 AWGN 채널과 비균일 레일리 페이딩 채널에서

최적화된 부호율을 AWGN 채널과 서로 다른 레일리 분포를 가지는 비균일 레일리 페이딩 채널에서 FER 성능을 비교한다. 마지막으로 V장에서는 본 논문의 결론을 내린다.

## II. 배경 이론

### 2.1 시스템 모델

본 논문은 그림 1과 같은 시스템 모델을 사용한다. 그림과 같이 처음에는 정보 비트들(information bits)이 저밀도 패리티 검사 부호의 부호기(encoder)를 통과하고 부호화된 이진 비트들  $v_j \in \{0, 1\}$  ( $j = 1, 2, \dots$ )은 이진 위상 천이(binary phase shift keying, BPSK) 변조기를 통과하여  $x_j = (-1)^{v_j} \in \{+1, -1\}$ 의 출력값을 가진다. 전체 길이  $N$ 을 가지는 변조된 신호는 상관관계가 없는 평평한(uncorrelated flat)  $L$ 개의 레일리 페이딩 채널을 통과하고 이때  $N/L$ 개의 한 블록 내 비트들은 서로 독립적이고 같은 확률분포(independent and identically distributed, iid)의 레일리 페이딩을 겪으며, 각 블록은  $\mathbb{E}[\alpha_j^2] = h_l$  ( $l = 1, 2, \dots, L$ )을 만족하는 서로 다른 레일리 페이딩 분포를 가진다. 예시로  $v_1$ 부터  $v_{N/L}$ 까지의  $N/L$ 개 이진 비트들은  $l = 1$ 인 블록에 속하며 모두  $\mathbb{E}[\alpha_j^2] = h_1$ 으로 동일한 레일리 페이딩 분포를 겪으나 각 비트들은 독립적으로 페이딩 계수를 가진다. 여기서  $\mathbb{E}[\cdot]$ 은 기댓값(expectation) 연산을 뜻한다. 채널을 통과한 출력값  $y_j$ 에 대하여

$$y_j = \alpha_j x_j + n_j \tag{1}$$

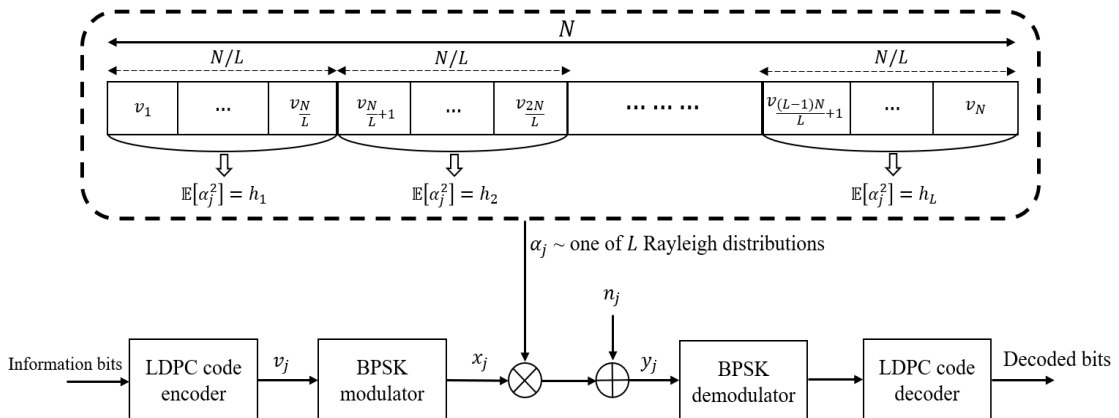


그림 1. 저밀도 패리티 검사 부호를 사용한 비균일 레일리 페이딩 채널의 시스템 모델  
Fig. 1. System model of non-uniform Rayleigh fading channels with LDPC codes

로 나타낼 수 있으며, 정규화된(normalized) 레일리 페이딩 계수  $\alpha_j$ 는 비트마다 다르고 에르고딕성(ergodicity)을 지닌다.  $n_j$ 는 평균이 0이고, 분산  $\sigma^2 = N_0/2$ 를 가지는 가우시안 잡음이며  $n_j \sim N(0, \sigma^2)$ 으로 나타낼 수 있다. 여기서  $N_0$ 는 잡음 전력 스펙트럼 밀도를 뜻한다. 수신된 신호  $y_j$ 는 복조기(demodulator)를 거친 후 연판정(soft decision) 복호기(decoder)를 통해 복호화된다. 여기서 연판정 복호기는 합-곱(sum-product) 알고리즘으로 구현한다. 일반적으로 수신단 안테나는 2개 이상의 다수로 구성될 수 있으며 수신 신호들은 maximum-ratio-combining (MRC) 또는 equal-gain -combining (EGC) 결합기(combiner)를 통해 결합된다<sup>[11,13]</sup>. 수신단 안테나 수와 블록 수  $L$ 은 일반적으로 다양한 값을 가질 수 있지만 단일 수신단 안테나와  $L=2$ 에서의 부호 설계 방법이 일반적인 상황에서의 부호 설계 방법으로 쉽게 확장될 수 있다. 따라서 본 논문에서는 단일 수신단 안테나와  $L=2$ 인 비균일 레일리 페이딩 채널을 가정한다.

### 2.2 프로토타그래프

프로토타그래프  $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{C}, \mathbf{E})$ 로 나타내며 변수(variable) 노드(node)들의 집합  $\mathbf{V}$ , 검사(check) 노드들의 집합  $\mathbf{C}$ , 엣지(edge)들의 집합  $\mathbf{E}$ 로 정의한다. 엣지  $e_{i,j} \in \mathbf{E}$ 는  $j$ 번째 변수 노드  $v_j \in \mathbf{V}$ 와  $i$ 번째 검사 노드  $c_i \in \mathbf{C}$ 의 연결 상태를 나타내며, 이는 반드시 1대 1 대응될 필요는 없다. 변수 노드의 수를  $n$ , 검사 노드의 수를  $m$ 이라 할 때 프로토타그래프의 기본 그래프 단위인 기본 행렬(base matrix)  $\mathbf{B}$ 는  $m \times n$  크기를 가지며 요소  $b_{i,j}$ 는  $v_j$ 와  $c_i$  사이에 연결된 엣지 수를 나타낸다. 프로토타그래프는 ‘복사-순열(copy-and-permutation)’ 작업을 통해 더 큰 프로토타그래프로 확장(lifting)시킬 수 있고 이때 확장 계수(lifting factor)를 조절하여 원하는 부호 길이를 달성할 수 있다. 프로토타그래프 기반 저밀도 패리티 검사 부호는 PEXIT 분석을 통해 복호 임계값을 구한다.

### 2.3 PEXIT 분석 알고리즘

과거 저밀도 패리티 검사 부호 설계에는 밀도 진화(density evolution)<sup>[14]</sup> 또는 이에 파생되는 기술 중 하나인 외부 정보 전송 차트(EXIT chart)<sup>[15]</sup>를 사용하여 반복 복호기의 복호 수렴 분석을 하였다. 하지만 밀도 진화의 경우 계산 복잡성, EXIT 차트의 경우에는 프로토타그래프 기반 저밀도 패리티 검사 부호에서 복호 임계값 예측 불일치 문제가 있었다. 이를 해결하기 위해 PEXIT

분석 알고리즘<sup>[10]</sup>이 제안되었으며 PEXIT 분석 알고리즘을 활용하여 에르고딕 나카가미(ergodic Nakagami) 페이딩 채널, 가우시안 다중 접근 채널(Gaussian multiple access channel, GMAC) 등 다양한 채널에서 저밀도 패리티 검사 부호 설계가 연구되어왔다<sup>[13,16-19]</sup>.

대표적으로 AWGN 채널과 균일 페이딩 채널에 대한 PEXIT 분석 알고리즘이 선행 연구들에서 소개되었다<sup>[10,11]</sup>. 본 절에서는 이를 토대로 비균일 레일리 페이딩 채널에 대한 PEXIT 분석 알고리즘을 소개한다. 우선 all-zero 부호어(codeword)가 전송된다고 가정하면  $j$ 번째 비트의 초기 채널 로그 우도비(log-likelihood ratio, LLR)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{LLR}_{ch,j} &= \ln \frac{\Pr(x_j = +1|y_j, \alpha_j)}{\Pr(x_j = -1|y_j, \alpha_j)} = \frac{2y_j \alpha_j}{\sigma^2} \\ &= \frac{2}{\sigma^2} (\alpha_j x_j + n_j) \alpha_j = \frac{2}{\sigma^2} (\alpha_j^2 + \alpha_j n_j). \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $n_j \sim N(0, \sigma^2)$  이므로

$$\alpha_j^2 + \alpha_j n_j \sim N(\alpha_j^2, \alpha_j^2 \sigma^2) \quad (3)$$

가 되고 식 (2), (3)을 따라 LLR의 가우시안 분포는

$$\text{LLR}_{ch,j} \sim N\left(\frac{2\alpha_j^2}{\sigma^2}, \frac{4\alpha_j^2}{\sigma^2}\right) \quad (4)$$

와 같이 표현할 수 있다.

다음으로 상호 정보(mutual information, MI)의 5가지 종류에 대해 정의한다.

- 1)  $I_{Ev}(i, j)$ 는  $v_j$ 에서  $c_i$ 로 보내는 외부 상호 정보 값.
- 2)  $I_{Av}(i, j)$ 는  $v_j$ 에 연결된  $c_i$ 들로부터 얻는 사전 상호 정보 값.
- 3)  $I_{Ec}(i, j)$ 는  $c_i$ 에서  $v_j$ 로 보내는 외부 상호 정보 값.
- 4)  $I_{Ac}(i, j)$ 는  $c_i$ 에 연결된  $v_j$ 들로부터 얻는 사전 상호 정보 값.
- 5)  $I_{\text{app}}(j)$ 는  $v_j$ 의 사후 상호 정보 값.

또한,  $j$ 번째 비트의 LLR이  $\text{LLR}_j \sim N\left(\frac{\sigma_j^2}{2}, \sigma_j^2\right)$ 을 따를 때, 가우스 근사(Gaussian approximation)와 역 채널 근사(reciprocal channel approximation)를 활용하여

상호 정보 값을 구하는  $J$  함수는 다음과 같이 표현될 수 있다<sup>[20]</sup>.

$$J(\sigma_j) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{(\xi - \sigma_j^2/2)^2}{2\sigma_j^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \log_2[1 + \exp(-\xi)] d\xi. \quad (5)$$

식 (5)의 역함수는 다음과 같이 표현된다<sup>[20]</sup>.

$$J^{-1}(x) = \begin{cases} a_1 x^2 + b_1 x + c_1 \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 0.3646 \\ a_2 \ln[b_2(1-x)] + c_2 x, & 0.3646 \leq x < 1 \end{cases} \quad (6)$$

이때  $a_1 = 1.09542$ ,  $a_2 = -0.706692$ ,  $b_1 = 0.214217$ ,  $b_2 = 0.386013$ ,  $c_1 = 2.33737$ ,  $c_2 = 1.75017$ 이다.

여기서 비균일 레일리 페이딩 채널에서의 PEXIT 분석 알고리즘은 알고리즘 1로 표현된다.  $R = (n - m)/n$ 의 부호율을 가지는  $m \times n$  크기 기본 행렬  $\mathbf{B}_{m \times n}$ 이 주어졌다고 할 때, 각 변수 노드마다  $K$ 개의 레일리 페이딩 계수를 저장한다. 앞에서 설명하였듯이  $\alpha_j$ 가 하나의 값으로 고정되었을 때는 AWGN 채널의 PEXIT 분석 알고리즘<sup>[10]</sup>과 유사하게 진행할 수 있지만  $\alpha_j$ 는 레일리 분포를 따르는 확률변수이므로 확률분포에 따라  $K$ 개의 페이딩 계수를 추출하여 레일리 페이딩 채널을 모사한다. 또한 앞서 설명한 바와 같이 본 논문에서는  $L = 2$ 의 비균일 레일리 페이딩 채널을 가정한다.  $j$ 번째 비트에 존재하는  $k \in \{1, 2, \dots, K\}$  번째 페이딩 계수  $\alpha_{j,k}$ 는  $k$ 에 따라 iid 하며 1부터  $n/2$ 까지의 각 변수 노드에는  $\mathbb{E}[\alpha_{j,k}^2] = h_1$ 을 만족하는 레일리 분포에 따른  $K$ 개의 페이딩 계수가 존재하고,  $n/2 + 1$ 부터  $n$ 까지의 각 변수 노드에는  $\mathbb{E}[\alpha_{j,k}^2] = h_2$ 를 만족하는 레일리 분포에 따른  $K$ 개의 페이딩 계수가 존재한다.

PEXIT 분석 알고리즘의 각 단계는 다음과 같으며 충분히 작은  $\sigma$ 를 활용한다.

- 1) **라인 1:** 초기 채널 상호 정보를 구하기 위해  $\alpha_{j,k}$ 에 대응되는  $\sigma_{j,k}$ 를 사용해야 한다.  $\sigma_{j,k}^2 = 4\alpha_{j,k}^2/\sigma^2$ 의 관계식을 가지므로  $E_b/N_0 = 1/2R\sigma^2$ 을 활용하여 식 (7)을 만들 수 있다. 생성된  $\sigma_{j,k}$ 와 식 (5)를 통해 총  $K$ 개의  $j$ 번째 비트 상호 정보 값을 계산할 수 있다.
- 2) **라인 2-10:** 중간 단계의 상호 정보의 연산 과정이다.  $t$ 는 반복 수를 뜻하며, variable to check update, check to variable update, a posteriori

**Algorithm 1** PEXIT algorithm over non-uniform Rayleigh fading channels

```

Input:  $\mathbf{B}_{m \times n}$ ,  $E_b/N_0$  (dB),  $T_{\max}$ ,  $K$ ,  $\sigma$ 
Output: Graph threshold  $(E_b/N_0)^*$ 
1: Initialization: For each  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $k \in \{1, \dots, K\}$ , generate  $\sigma_{j,k}^2$  as follow:

$$\sigma_{j,k}^2 = 4\alpha_{j,k}^2/\sigma^2 = 8R\alpha_{j,k}^2 \cdot 10^{\frac{E_b/N_0}{10}} \begin{cases} 1 \leq j \leq \frac{n}{2}, \mathbb{E}[\alpha_{j,k}^2] = h_1 \\ \frac{n}{2} < j \leq n, \mathbb{E}[\alpha_{j,k}^2] = h_2 \end{cases} \quad (7)$$

 $\mathbb{E}[\cdot]$  is the expectation operator.
2:  $t$  is set to 0.
3: while  $t < T_{\max}$  do
4:    $t \leftarrow t + 1$ .
5:   Variable to check update: For each  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $k \in \{1, \dots, K\}$ ,

$$I_{Ev}(i, j) = \mathbb{E}[I_{Ev,k}(i, j)] = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{Ev,k}(i, j), \quad (8)$$


$$I_{Ev,k}(i, j) = J\left(\sqrt{\sum_{s=1}^m b_{s,j} [J^{-1}(I_{Av}(s, j))]^2} + (b_{i,j} - 1) [J^{-1}(I_{Av}(i, j))]^2} + \sigma_{j,k}^2\right). \quad (9)$$

6:   Check to variable update: For each  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$I_{Ec}(i, j) = 1 - J\left(\sqrt{\sum_{s=1}^m b_{i,s} [J^{-1}(1 - I_{Ac}(i, s))]^2} + (b_{i,j} - 1) [J^{-1}(1 - I_{Ac}(i, j))]^2}\right). \quad (10)$$

7:   APP-LLR mutual information evaluation: For each  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $k \in \{1, \dots, K\}$ ,

$$I_{app}(j) = \mathbb{E}[I_{app,k}(j)] = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_{app,k}(j), \quad (11)$$


$$I_{app,k}(j) = J\left(\sqrt{\sum_{s=1}^m b_{s,j} [J^{-1}(I_{Av}(s, j))]^2} + \sigma_{j,k}^2}\right). \quad (12)$$

8:   if  $I_{app}(j) = 1, \forall j$ , then  $(E_b/N_0)^* = 10 \log_{10} \frac{1}{2R\sigma^2}$  and we set  $\sigma^2 = \sigma^2 + 0.001$ , go to line 1.
9:   end if
10: end while
11: return  $(E_b/N_0)^*$ 
    
```

알고리즘 1. 비균일 레일리 페이딩 채널에서 PEXIT 분석 알고리즘  
Algorithm 1. PEXIT algorithm over non-uniform Rayleigh fading channels

probability (APP)-LLR mutual information evaluation의 순으로 모두 진행하며 최대 반복 수  $T_{\max}$ 까지 반복한다.

- 3) **라인 5:** 각 변수 노드마다  $K$ 개의 페이딩 계수가 존재하며,  $n \times K$ 개의  $I_{Ev,k}$ 를 생성한다.  $I_{Ev}$ 는 해당 변수 노드에 존재하는  $K$ 개의  $I_{Ev,k}$ 를 평균 내서 구하고 이는 variable to check update의 외부 상호 정보이다. 반복 수  $t$ 가 1일 때는 검사 노드로부터 받는 사전 상호 정보 값  $I_{Av}$  ( $I_{Av} = I_{Ev}$ )가 존재하지 않으므로 **라인 1**에서 구한 초기 채널 상호 정보 값을 대응시켜  $I_{Ev,k}$ 으로 사용한다.
- 4) **라인 6:** 검사 노드 입장에서는 평균 낸  $I_{Ev}$  ( $I_{Ac} = I_{Ev}$ )가 들어오므로 **라인 5**와 같이 평균 낼 필요가 없으며, 식 (10)에 따라 check to variable update의 외부 상호 정보인  $I_{Ec}$ 를 구할 수 있다.
- 5) **라인 7:** 해당 변수 노드에 연결되어있는 모든 엣지들로부터 사전 상호 정보인  $I_{Av}$  값을 받고 식 (11), (12)로부터 사후 상호 정보 값인  $I_{app}$ 를 계산

한다.

6) **라인 8-11:** 모든  $j$ 에 대해  $I_{app}$  값이 1에 수렴한다면 이는 더 열악한 채널 환경에서도 정상적으로 동작 할 가능성이 있음을 의미한다. 그러므로  $\sigma^2$ 을 증가시키고 **라인 1**로 돌아간다. 만일 반복 수가 최대 반복 수에 도달했을 때 모든  $j$ 에 대해  $I_{app}$  값이 1에 수렴하지 못한다면 반복을 멈추고 직전의 성공한 값을 복호 임계값으로 판단한다. 출력  $(E_b/N_0)^*$ 은 해당 프로토그래프의 복호 임계값이며, 단위는 데시벨이다.

알고리즘 1에서 정확한 복호 임계값 산출을 위해서는 다수의 페이딩 계수가 필요하다. 그렇지 않을 경우 딥 페이딩(deep fading)으로 인해 신뢰할 수 있는 복호 임계값을 구할 수 없다. 이러한 이유로 본 논문에서는 비균일 레일리 페이딩 채널에서 정확한 복호 임계값을 구할 때  $K = 10^5$ 을 사용하였다.

### III. 최적화 기법

#### 3.1 페이딩 계수의 수 $K$ 에 따른 복호 임계값

확률 모델에서 임의의 확률분포를 따르는 확률변수의 수가 많을수록 해당 확률분포를 잘 표현하므로 레일리 페이딩 채널에서는 다수의 페이딩 계수를 활용하여 레일리 페이딩 분포를 모사한다. 이러한 이유로 II-3절에서 언급한 바와 같이 정확한 복호 임계값 산출을 위해서는  $K=10^5$ 개의 페이딩 계수를 활용한다. 다수의 페이딩 계수는 식 (7), (9), (12)에서 활용되는데, AWGN 채널에서의 PEXIT 분석 알고리즘<sup>[10]</sup>과 비교하면 대응되는 과정에서  $K$ 배 만큼의 연산을 추가로 수행하므로 계산 복잡도가 상대적으로 높지만 소수의 프로토그래프에 대해 복호 임계값을 산출하는 것에서는 문제 되지 않는다. 하지만 부호 최적화 과정에서는 다수의 프로토그래프에 대한 복호 임계값 산출이 필요하므로 최적화 과정에서 다수의 페이딩 계수를 활용하는 것은 불가능하다.

따라서 프로토그래프 설계를 위해 차등 진화 알고리즘을 활용할 때 알고리즘 1을 사용하기 위해서는 복호 임계값 정확도와 계산 복잡도를 고려하여 적절한 페이딩 계수의 수를 선택해야 한다. 적절한 페이딩 계수의 수를 결정하기 위해 식 (13)과 같은 기본 행렬에 대해  $\mathbb{E}[\alpha_{j,k}^2] = 1$ 인 균일 레일리 페이딩 채널에서 다양한  $K$  값에 따라 복호 임계값을 측정한다.

$$\mathbf{B}_{4 \times 8} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

(13)은 AWGN 채널에서 차등 진화 알고리즘을 활용하여 최적화된  $4 \times 8$ 크기의 기본 행렬이다.

표 1은 위의 균일 레일리 페이딩 채널에서 (13)에 대해 페이딩 계수의 수에 따른 복호 임계값의 최댓값, 최솟값, 평균, 표준편차를 나타낸다. 하나의

프로토그래프에 대해 별개의  $\alpha_{j,k}$  집합을 활용하여 총 1000번을 수행한 결과이며, 그림 2는 표 1을 그래프로 표현한 것이다. 표 1의 평균 임계값을 보면  $K = 100$ 과  $K = 500$ 에서 0.04dB 만큼 차이난다. 다시,  $K = 500$ 과  $K = 10^3$ 은 0.014dB 만큼 차이난고  $K = 10^3$ 과  $K = 10^5$ 은 0.005dB 밖에 차이난다.

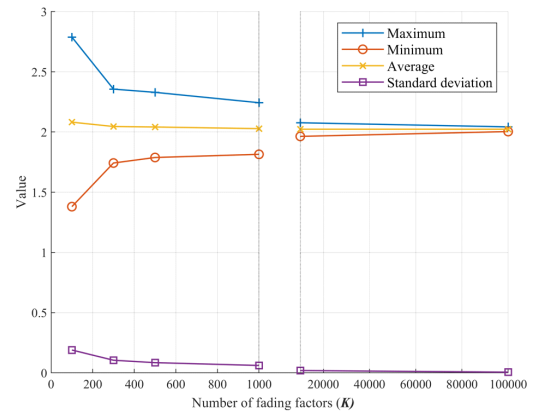


그림 2. 페이딩 계수의 수에 따른 기본 행렬 (13)에 대한 복호 임계값 정확도

Fig. 2. Exactness of the decoding thresholds for the base matrix (13) according to the number of fading factors

표 1. 페이딩 계수의 수에 따른 기본 행렬 (13)에 대한 임계값의 최대, 최소, 평균, 표준편차

Table 1. Maximum, minimum, average, standard deviation of the thresholds for the base matrix (13) according to the number of fading factors

$K$	Threshold $(E_b/N_0)^*$			
	Max	Min	Avg	Std
100	2.7881	1.3801	2.0816	0.189667
300	2.3561	1.7424	2.0455	0.104788
500	2.3292	1.7883	2.0415	0.084587
10 <sup>3</sup>	2.2432	1.8147	2.0279	0.061341
10 <sup>4</sup>	2.0768	1.9637	2.0231	0.01921
10 <sup>5</sup>	2.0424	2.0035	2.0230	0.005809

이는  $K=10^3$ 을 활용하더라도 주어진 레일리 분포를 어느정도 잘 모사함을 보인다. 또한  $10^3$ 과  $10^5$ 은 100배 차이로 그에 근사한 배율만큼 계산 복잡도에서 이득을 본다. 하지만 최댓값, 최솟값 모두 평균값 대비 0.2dB 씩 차이나는  $K=10^3$ 과 달리  $K=10^5$ 에서는 0.02dB 씩 밖에 차이하지 않고 표준편차 또한 가장 낮아 정확한 복호 임계값 산출 시  $K=10^3$ 보다 유리하다. 따라서 계산 복잡도에서 이득을 보면서 정확한 복호 임계값을 산출하기 위해서는 페이딩 계수의 수를 상황에 맞게 활용해야 한다. 이에 본 논문에서는 III-2절 차등 진화 알고리즘에서 최적화를 진행하는 단계에서는 다수의 프로토타입에 대해 복호 임계값을 산출하므로  $K=10^3$ 으로 사용하고, 최종단계에서는 가장 우수한 복호 임계값을 가진 프로토타입을 추출하기 위해 정확한 복호 임계값을 산출할 수 있는  $K=10^5$ 을 사용한다.

### 3.2 차등 진화

부호를 최적화한다는 것은 복호 임계값을 사논의 한계에 근접하게 만드는 것이다. 하지만 우수한 복호 임계값이 항상 좋은 성능을 보장하지는 않아서 복호 임계값 외에 다른 조건들을 고려하여 부호를 설계해야 한다. 예를 들어, 오류 마루(error-floor) 현상을 완화하기 위해 프로토타입에서 연결 차수가 2인 변수 노드의 수는 전체 검사 노드의 수보다 적게 설정하여 최소거리 선형 증가를 보장<sup>21</sup>해야 하며 확장 계수를 충분히 크게 설정해야 한다.

본 논문에서는 프로토타입 기반 저밀도 패리티 검사 부호 최적화를 위해 가장 우수한 복호 임계값을 추적하는 차등 진화 알고리즘<sup>22</sup>을 사용하며, II-3절에서 설명한 비균일 레일리 페이딩 채널의 복호 임계값을 비용 함수로 사용한다. 또한 이중 지수 하락(double exponential fall) 특성과 최소거리 선형 증가 특성을 만족하기 위해 연결 차수가 2인 변수 노드뿐만 이루어진 루프(loop)가 없도록 설계한다. 더불어 연결 차수가 0과 1인 변수, 검사 노드를 없게 하며 해당 조건들을 기본 생성조건  $\beta$ 라 부른다. 차등 진화에 사용되는 주 변수들을 다음과 같이 정의한다.

- 1)  $\mathbf{B}_{u,g}$  :  $g$ 번째 세대의  $u$ 번째 후보(candidate) 행렬.
- 2)  $g_{\max}$  : 최대 세대 수.
- 3)  $N_p$  : 후보군의 개수.
- 4)  $p_c$  : 교차 확률.
- 5)  $d_{\max}$  : 행렬 내 엔트리의 최댓값.
- 6)  $d_{\text{avg}}$  : 변수 노드 기준 행렬 내 모든 엔트리 값의 평균.

본 논문에서는  $g_{\max} = 5000$ ,  $N_p = 100$ ,  $p_c = 0.88$ , 식 (14)에 활용되는  $F=0.5$ 로 설정했으며,  $d_{\max}$ 와  $d_{\text{avg}}$ 는 행렬 크기마다 다르게 적용하였고 이는 III-4절에서 설명한다.  $N_p = 10$  [C | V] 로 하는 것이 보편적이거나  $N_p = 100$ 과 비교했을 때, 임계값 결과가 거의 비슷하여 수렴 속도가 빠른  $N_p = 100$ 을 병렬적으로 실행하여 가장 우수한 임계값을 갖는 프로토타입을 얻었다. 이때 제안하는 차등 진화 알고리즘은 알고리즘 2와 같고 각 단계에 대한 설명은 다음과 같다.

- 1) **라인 1:**  $m \times n$  크기를 가지는 0세대 후보 행렬  $\mathbf{B}_{u,0}$ 를  $N_p$ 개만큼 만들고,  $\mathbf{B}_{u,0}$ 의 모든 엔트리 값은 0과  $d_{\max}$  사이에서 랜덤하게 선택되며 변수 노드 기준 엔트리 값의 평균이  $d_{\text{avg}}$ 보다 작거나 같아야 한다. 만일 해당 행렬이 기본 생성조건  $\beta$

---

#### Algorithm 2 Differential evolution algorithm using Algorithm 1

---

**Input:**  $m, n, d_{\max}, d_{\text{avg}}, N_p, F, p_c, g_{\max}$

**Output:**  $\mathbf{B}_{m \times n}$

- 1: **Initialization:** Generate an  $m \times n$  base matrix  $\mathbf{B}_{u,0}$  randomly for  $u \in \{1, \dots, N_p\}$ , where each entry belongs to  $\{0, \dots, d_{\max}\}$  and the average variable node degree of  $\mathbf{B}_{u,0}$  must be less than or equal to  $d_{\text{avg}}$ . If  $\mathbf{B}_{u,0}$  does not satisfy constraints represented by  $\beta$ ,  $\mathbf{B}_{u,0}$  is regenerated. Then, calculate the threshold of  $\mathbf{B}_{u,0}$  using Algorithm 1 with  $K = 10^3$ .
  - 2:  $g$  is set to 0.
  - 3: **while**  $g < g_{\max}$  **do**
  - 4:     **Mutation:** For each  $u \in \{1, \dots, N_p\}$ , generate  $\mathbf{M}_{u,g}$  as follow:
 
$$[\mathbf{M}_{u,g}]_{i,j} = \text{round}([\mathbf{B}_{r_1,g}]_{i,j} + F([\mathbf{B}_{r_2,g}]_{i,j} - [\mathbf{B}_{r_3,g}]_{i,j})), \quad (14)$$
 where distinct  $r_s \in \{1, \dots, N_p\}$ ,  $s = 1, 2, 3$  are randomly selected. If any entry of  $\mathbf{M}_{u,g}$  is larger than  $d_{\max}$ , it is replaced by  $d_{\max}$ , and if it is less than 0, it is replaced by 0.
  - 5:     **Crossover:** For each  $u \in \{1, \dots, N_p\}$ , generate the new base matrix  $\mathbf{B}'_{u,g}$  as follow:
 
$$[\mathbf{B}'_{u,g}]_{i,j} = \begin{cases} [\mathbf{M}_{u,g}]_{i,j}, & \text{with a probability } p_c \\ [\mathbf{B}_{u,g}]_{i,j}, & \text{with a probability } 1 - p_c \end{cases} \quad (15)$$
 If  $\mathbf{B}'_{u,g}$  does not satisfy  $\beta$  and  $d_{\text{avg}}$  constraints,  $\mathbf{B}'_{u,g}$  is regenerated. Then, calculate the threshold of  $\mathbf{B}'_{u,g}$  using Algorithm 1 with  $K = 10^3$ .
  - 6:     **Selection:** For each  $u \in \{1, \dots, N_p\}$ , select the next generation base matrix  $\mathbf{B}_{u,g+1}$  as follow:
 
$$\mathbf{B}_{u,g+1} = \begin{cases} \mathbf{B}_{u,g}, & \text{if } (\mathbf{B}_{u,g})^{\text{th}} \leq (\mathbf{B}'_{u,g})^{\text{th}} \\ \mathbf{B}'_{u,g}, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$
 ( $\mathbf{A}$ )<sup>th</sup> denotes the threshold of the matrix  $\mathbf{A}$  calculated by Algorithm 1 with  $K = 10^3$ .
  - 7:      $g \leftarrow g + 1$ .
  - 8: **end while**
  - 9: Select the best 10 final base matrices, reset the number of fading factor as  $10^5$ , and perform Algorithm 1 again. Among them, choose the base matrix having the best threshold.
- 

알고리즘 2. 알고리즘 1을 활용한 차등 진화 알고리즘  
Algorithm 2. Differential evolution algorithm using Algorithm 1

를 충족하지 못한다면 행렬은 재생성된다.

- 2) **라인 2-8:** 라인 4-6의 실행이 완료될 시  $g$ 를 1 증가시키며 해당 작업은  $g$ 가  $g_{\max}$ 에 도달할 때까지 반복된다.
- 3) **라인 4:** 새로운 후보 행렬을 만들 때 필요한 행렬  $\mathbf{M}_{u,g}$ 을 만드는 과정이다. 식 (14)를 따르며  $\mathbf{B}_{r_s,g}$ 는  $N_b$ 개의  $\mathbf{B}_{u,g}$  중 랜덤하게 선택되고 중복되지 않는다. 행렬  $\mathbf{B}$ 에 대해  $[\mathbf{B}]_{i,j}$ 는  $\mathbf{B}$ 의  $i$ 행,  $j$ 열 성분을 의미하고 식 (14)로 얻어진  $\mathbf{M}_{u,g}$ 의 엔트리들은 0과  $d_{\max}$  사이의 가장 가까운 정수값으로 대체된다.
- 4) **라인 5:** 새로운 후보 행렬  $\mathbf{B}'_{u,g}$ 를 생성한다.  $p_c$ 의 확률로  $\mathbf{M}_{u,g}$ 의 엔트리가 선택되고,  $1-p_c$ 의 확률로  $\mathbf{B}_{u,g}$ 의 엔트리가 선택된다.  $\mathbf{B}'_{u,g}$ 의 생성 또한 기본 생성조건  $\beta$ 와  $d_{\text{avg}}$  조건을 따른다.
- 5) **라인 6:**  $u$ 번째 자리에 해당하는  $\mathbf{B}_{u,g}$ 와 라인 4, 5에 의해 만들어진  $\mathbf{B}'_{u,g}$ 의 복호 임계값을 비교한다. 복호 임계값 계산은 알고리즘 1을 사용하며, 더 우수한 복호 임계값을 가지는 행렬을 다음 세대의 후보 행렬로 선택하고 해당 세대의 모든  $u$ 에 대해 진행한다. 이때 최적화 알고리즘의 경량화를 위해  $K=10^3$ 으로 설정한다.
- 6) **라인 9:**  $g$ 가  $g_{\max}$ 에 도달했을 때, 가장 우수한 복호 임계값을 가지는 10개의  $\mathbf{B}_{u,g_{\max}}$ 에 대해 페이딩 계수의 수  $K=10^5$ 으로 설정하고 알고리즘 1을 통해 최종 복호 임계값을 산출한다. 그 후 가장 우수한 복호 임계값을 갖는 프로토타입을 얻는다.

**Remark :** 경량화된 차등 진화 알고리즘의 초기 페이딩 계수의 수는  $10^3$ 개로 진행하였으며, 라인 9에서 최종적으로 최적화된 프로토타입을 구할 때는  $10^5$ 개로 진행하였다.

### 3.3 균일 채널에 대한 최적화

모든 비트에 대해 같은 잡음 분포를 겪는 균일 채널에서 저밀도 패리티 검사 부호에 대한 최적화는 다양한 환경에서 진행되어왔다. 이때 채널 상황이 다르더라도 균일하다면 부호의 성능 차이는 크지 않으며, 특정 균일 채널에서 우수한 부호는 다른 채널에서도 성능이 우수하다는 선행 연구가 있다<sup>22,23</sup>. 이러한 성질은 균일 채널의 경우 대리 채널을 활용하여 부호를 최적화할 수

있음을 보여준다.

앞서 언급한 바와 같이 레일리 페이딩 채널은 페이딩 계수가 고정되면 신호 대 잡음비(signal-to-noise ratio, SNR)가 다른 AWGN 채널로 간주할 수 있다. 따라서 균일 레일리 페이딩 채널과 균일 AWGN 채널은 최적화 결과가 상당히 유사할 것임을 예측할 수 있다. 이를 확인하기 위해 AWGN 채널에 최적화된 프로토타입 20개를 추출하여 AWGN 채널과 균일 레일리 페이딩 채널에서의 복호 임계값을 비교한다. 이때 균일 레일리 페이딩 채널은  $E[\alpha_{j,k}^2] = 1$ 의 정규화된 페이딩 분포를 따르는 것으로 가정한다. 표 2는 각 채널에서의 복호 임계값 평균과 가장 우수한 복호 임계값을 나타낸다. 해당 프로토타입들은 AWGN 채널에 최적화되었기 때문에 AWGN 채널에서의 복호 임계값에 대해 평균값과 가장 우수한 값이 큰 차이가 없을 것이라 예상할 수 있고 표 2를 통해서도 0.01dB 밖에 차이하지 않는 것을 확인할 수 있다. 하지만 표 2를 통해 균일 레일리 페이딩 채널에서도 그 차이가 0.02dB로 마찬가지로 현상이 나타남을 확인할 수 있다. 따라서 채널이 균일한 경우 AWGN 채널과 레일리 페이딩 채널은 부호 최적화 관점에서 유사하게 동작함을 확인할 수 있다.

위의 결과로부터 복호 임계값 기준으로 최적화하는 것이 균일 AWGN 채널과 레일리 페이딩 채널에서는 차이가 없다고 생각할 수 있는 반면에 비균일 채널은 비트들이 블록마다 서로 다른 잡음 분포를 겪으므로, 균일 채널과 다르게 채널 특성의 영향을 크게 받을 수 있다. 이와 비슷한 상황으로 불균등한 전력 할당으로 정보 비트와 패리티 비트의 전력이 다른 상황에서 프로토타입 기반 저밀도 패리티 검사 부호를 최적화한 연구가 있다<sup>19</sup>. 이렇듯 비균일 채널에서는 일반적으로 표 2와 같은 결과를 보여주기 어렵다고 예상할 수 있다. 다음 III-4절에서는 알고리즘 2로 비균일 레일리 페이딩 채널에서 최적화된 프로토타입 구조를 보이고 각 채널에 따른 복호 임계값 양상이 표 2와는 다를음을 보인다. 이로부터 제안하는 최적화 알고리즘이 비균일 레일리

표 2. AWGN 채널에 최적화된 20개의 프로토타입에 대해 균일 AWGN/레이리 페이딩 채널 하에서 가장 우수한 복호 임계값과 평균값  
Table 2. The best and average decoding thresholds under uniform AWGN/Rayleigh fading channels for 20 protographs optimized for AWGN channels

Threshold $(E_b/N_0)^*$	AWGN channels	Rayleigh fading channels
Best	0.384006	2.01049
Average	0.394642	2.03023



페이딩 채널에서 효과적임을 증명한다.

3.4 비균일 레일리 페이딩 채널에서의 최적화

$L=2$ 인 비균일 레일리 페이딩 채널 하에서 알고리즘 2로 최종 프로토그래프를 추출하였으며,  $K=10^5$  및 알고리즘 1을 활용하여 복호 임계값을 계산한다. 복호 임계값은  $E_b/N_0$  (dB)를 기준으로 하였고 최대 반복 수  $T_{max}=400$ 이며 기본 행렬 크기에 따라 사용된  $d_{max}$ 와  $d_{avg}$ 의 값은 표 3에 기술되어 있다. 본 논문에서는 총 3종류의 채널에서 최적화를 진행하였다: 1) 비균일 레일리 페이딩 채널, 2)  $h_1=1, h_2=2$ 인 비균일 레일리 페이딩 채널, 3)  $h_1=3, h_2=2$ 인 비균일 레일리 페이딩 채널. 또한 총 4종류의 기본 행렬 크기에 대해 최적화를 진행하였다: 1)  $3 \times 12$ , 2)  $4 \times 12$ , 3)  $4 \times 8$ , 4)  $4 \times 6$ .

3.4.1 균일 AWGN 채널에 최적화된 프로토그래프

$3 \times 12$  크기, 부호율 3/4인 최적화된 프로토그래프의 기본 행렬 구조:

$$\mathbf{B}_{AWGN}^{3/4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 3 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 4 & 5 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

$4 \times 12$  크기, 부호율 2/3인 최적화된 프로토그래프의 기본 행렬 구조:

$$\mathbf{B}_{AWGN}^{2/3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 5 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

$4 \times 8$  크기, 부호율 1/2인 최적화된 프로토그래프의 기본 행렬 구조:

$$\mathbf{B}_{AWGN}^{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

$4 \times 6$  크기, 부호율 1/3인 최적화된 프로토그래프의 기본 행렬 구조:

$$\mathbf{B}_{AWGN}^{1/3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

3.4.2  $h_1=1, h_2=2$ 인 비균일 레일리 페이딩 채널에 최적화된 프로토그래프

$h_1=1, h_2=2$ 인 비균일 레일리 페이딩 채널을  $P_1$  채널이라 하며 이때 최적화된 프로토그래프를 proposed1로 표현한다.

$3 \times 12$  크기, 부호율 3/4인 최적화된 프로토그래프의 기본 행렬 구조:

$$\mathbf{B}_{proposed1}^{3/4} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 5 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

$4 \times 12$  크기, 부호율 2/3인 최적화된 프로토그래프의 기본 행렬 구조:

$$\mathbf{B}_{proposed1}^{2/3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

$4 \times 8$  크기, 부호율 1/2인 최적화된 프로토그래프의 기본 행렬 구조:

$$\mathbf{B}_{proposed1}^{1/2} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

$4 \times 6$  크기, 부호율 1/3인 최적화된 프로토그래프의 기본 행렬 구조:

$$\mathbf{B}_{proposed1}^{1/3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

3.4.3  $h_1=3, h_2=2$ 인 비균일 레일리 페이딩 채널에 최적화된 프로토그래프

$h_1=3, h_2=2$ 인 비균일 레일리 페이딩 채널을  $P_2$  채널이라 하며 이때 최적화된 프로토그래프를 proposed2로 표현한다.

$3 \times 12$  크기, 부호율 3/4인 최적화된 프로토그래프의 기본 행렬 구조:

$$\mathbf{B}_{proposed2}^{3/4} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 2 & 4 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

$4 \times 12$  크기, 부호율 2/3인 최적화된 프로토그래프

표 3. 각 채널에 최적화된 프로토타입들의 임계값 비교  
Table 3. Threshold comparison of protographs optimized for each channel

Code	Code rate	Base size	$d_{\max}$	$d_{\text{avg}}$	Threshold $(E_b/N_0)^*$ for each channel		
					AWGN	$P_1$	$P_2$
$\mathbf{B}_{\text{AWGN}}^{3/4}$	0.75	$3 \times 12$	5	5.2	<b>1.782</b>	4.229	1.602
$\mathbf{B}_{\text{proposed1}}^{3/4}$					1.898	<b>3.740</b>	1.547
$\mathbf{B}_{\text{proposed2}}^{3/4}$					1.848	4.037	<b>1.252</b>
$\mathbf{B}_{\text{AWGN}}^{2/3}$	0.667	$4 \times 12$	5	6.2	<b>1.251</b>	2.746	0.203
$\mathbf{B}_{\text{proposed1}}^{2/3}$					1.436	<b>2.373</b>	0.463
$\mathbf{B}_{\text{proposed2}}^{2/3}$					1.346	2.936	<b>-0.054</b>
$\mathbf{B}_{\text{AWGN}}^{1/2}$	0.5	$4 \times 8$	5	5	<b>0.386</b>	0.791	-1.801
$\mathbf{B}_{\text{proposed1}}^{1/2}$					0.552	<b>0.489</b>	-1.426
$\mathbf{B}_{\text{proposed2}}^{1/2}$					0.585	1.531	<b>-1.855</b>
$\mathbf{B}_{\text{AWGN}}^{1/3}$	0.333	$4 \times 6$	4	4	<b>-0.124</b>	-0.051	-2.634
$\mathbf{B}_{\text{proposed1}}^{1/3}$					-0.056	<b>-0.787</b>	-2.888
$\mathbf{B}_{\text{proposed2}}^{1/3}$					0.018	-0.008	<b>-3.058</b>

의 기본 행렬 구조:

$$\mathbf{B}_{\text{proposed2}}^{2/3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

$4 \times 8$  크기, 부호율 1/2인 최적화된 프로토타입의 기본 행렬 구조:

$$\mathbf{B}_{\text{proposed2}}^{1/2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

$4 \times 6$  크기, 부호율 1/3인 최적화된 프로토타입의 기본 행렬 구조:

$$\mathbf{B}_{\text{proposed2}}^{1/3} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

표 3을 보면 각 채널에 대해 최적화된 프로토타입이 그 채널에서 가장 우수한 복호 임계값을 가지며 어느 한 채널에서 우수한 부호가 다른 채널에서 우수하지 않

을 수 있다는 것을 확인할 수 있다. 이로부터 균일 채널과 달리 비균일 채널에서는 각 채널에 맞게 최적화하는 것이 중요하며 제안하는 경량화된 알고리즘이 효과적인 임을 확인할 수 있다. 부호 임계값 외에 실제 성능은 IV장에서 FER로 검증 및 비교한다.

#### IV. 실험 결과

III-4절에서 최적화된 프로토타입들에 대해 균일 AWGN 채널과 비균일 레일리 페이딩 채널에서 FER를 측정하며,  $P_1$  채널은  $h_1 = 1, h_2 = 2$ 이고  $P_2$  채널은  $h_1 = 3, h_2 = 2$ 인 비균일 레일리 분포를 따른다. 측정된 모든 프로토타입 부호의 길이  $N = 30000$ 이고 합-곱 알고리즘을 사용하여 복호화를 진행하였으며 복호 반복 횟수(decoding iteration)는 400으로 설정하였다. 앞서 설명한 바와 같이 총 3종류의 채널에 대해 최적화를 진행하였으며 각각 부호율을 제외한 표기법을 따르면  $\mathbf{B}_{\text{proposed1}}$  은  $P_1$  채널에 대해 최적화,  $\mathbf{B}_{\text{proposed2}}$  는  $P_2$  채널에 대해 최적화된 프로토타입의 기본 행렬을 의미하고 균일 AWGN 채널에 최적화된 프로토타입의 기본 행렬  $\mathbf{B}_{\text{AWGN}}$  를 비교 대상으로 사용한다.

그림 3을 보면  $P_1$  채널에서는  $\mathbf{B}_{\text{proposed1}}$  의 FER 성

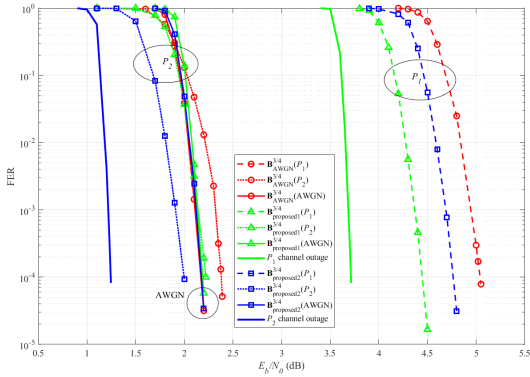


그림 3. 부호율 0.75인 프로토타이프들의 각 채널에 따른 FER 성능  
Fig. 3. FER performance of protographs for each channel with a code rate 0.75

능이 가장 좋게 나오며  $P_2$  채널에서는  $B_{\text{proposed2}}$ 가, 균일 AWGN 채널에서는  $B_{\text{AWGN}}$ 가 비교군 내에서 가장 좋은 FER 성능을 보인다. 다른 부호율을 가지는 그림 4, 5, 6에서도 똑같은 양상을 보이며, 이는 표 3의 복호 임계값 경향성과 일치한다. 더욱이  $P_1$  채널 및  $P_2$  채널의 경우 각 부호율에 대해서 페이딩 채널의 이론적 한계치인 채널 중단 확률(channel outage probability)과 FER 성능 차이를 봤을 때 제안하는 부호 설계 알고리즘이 효과적임을 확인할 수 있다.

각 채널에서 최적화된 프로토타이프들의 복호 임계값 및 FER 성능 결과를 균일 AWGN 채널에서 살펴보면 그 성능 차이가  $P_1, P_2$  채널 대비 크지 않은 것을 확인할 수 있다. 이는 III-3절에서 확인한 바와 같이 레일리 페이딩 채널에서의 부호 최적화도 AWGN 채널과

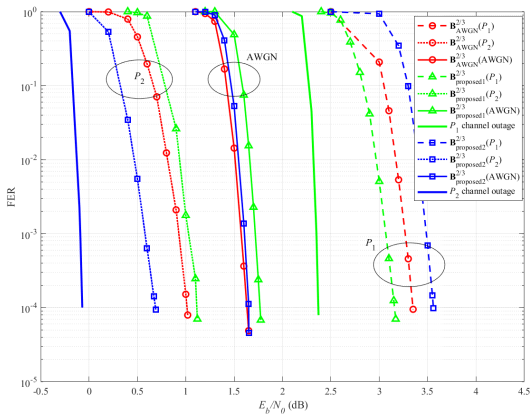


그림 4. 부호율 0.667인 프로토타이프들의 각 채널에 따른 FER 성능  
Fig. 4. FER performance of protographs for each channel with a code rate 0.667

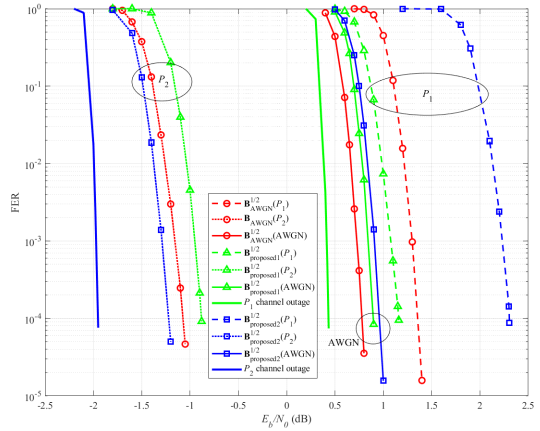


그림 5. 부호율 0.5인 프로토타이프들의 각 채널에 따른 FER 성능  
Fig. 5. FER performance of protographs for each channel with a code rate 0.5

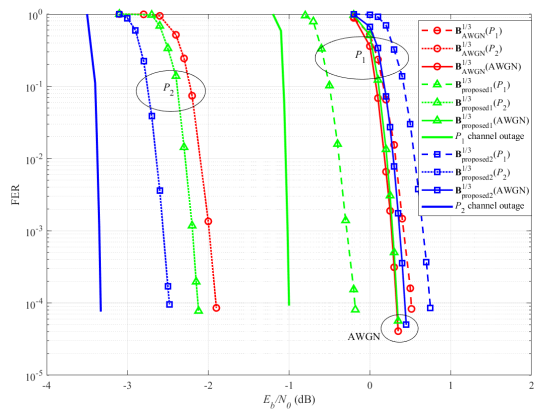


그림 6. 부호율 0.333인 프로토타이프들의 각 채널에 따른 FER 성능  
Fig. 6. FER performance of protographs for each channel with a code rate 0.333

같이 SNR을 최적화하는 방향으로 진행되기 때문이다. 비균일 레일리 페이딩 채널의 경우 레일리 페이딩 분포가 달라 SNR을 비균일하게 최적화하는 방향으로 설계되지만 여전히 전체 SNR을 최적화하는 과정의 특수 상황으로 생각될 수 있다. 이에 채널이 균등하여 전체 SNR 관점에서 동작되는 균일 AWGN 채널에서는 부호들의 성능 차이가 크지 않은 것으로 판단된다. 다만 채널의 비균일성이 명확한  $P_1, P_2$  채널의 경우 비균일한 SNR 특성이 큰 성능 차이를 야기하는 것을 확인할 수 있다. 이러한 결과들은 제한한 경량화된 차등 진화 알고리즘으로 비균일 레일리 페이딩 채널에 최적화된 프로토타이프 기반 저밀도 패리티 검사 부호의 설계가 효과적임을 보여준다.

## V. 결 론

본 논문에서는 비균일 레일리 페이딩 채널에서의 프로토그래프 기반 저밀도 패리티 검사 부호 설계 알고리즘을 제안하였다. 이를 위해 비균일 레일리 페이딩 채널에 적합하도록 PEXIT 분석 알고리즘을 수정하고 다수의 페이딩 계수를 활용하여 정확한 복호 임계값을 구하였다. 하지만 차등 진화 알고리즘에서 다수의 페이딩 계수를 사용하는 것은 계산 복잡도 측면에서 불가능하기 때문에 적은 수의 페이딩 계수를 사용하여 최적화를 진행하다가 최종단계에서 다수의 페이딩 계수를 활용하는 경량화된 차등 진화 알고리즘을 제안하였다. 이때 페이딩 계수의 수에 따른 최대, 최소, 평균, 표준편차를 비교하여 경량화된 차등 진화 알고리즘에 적합한 페이딩 계수의 수를 설정하였다. 균일 채널에서는 AWGN 채널과 레일리 페이딩 채널이 부호 설계 관점에서 유사하게 동작함을 확인하였다. 하지만 비균일 채널에서는 프로토그래프의 복호 임계값 및 FER 성능을 통해 각 채널에서 최적화된 프로토그래프가 해당 채널에 대해 성능이 가장 우수한 것을 보였다. 이로부터 본 논문에서 제안한 경량화된 부호 설계 알고리즘이 비균일 레일리 페이딩 채널에서 효과적임을 확인할 수 있다.

본 논문에서는 단일 수신단 안테나와 블록 수  $L=2$  인 비균일 레일리 페이딩 채널을 가정하여 부호 설계를 하였지만 향후 다수의 수신 안테나나 다수의 블록 수 환경으로 연구 결과를 확장시킬 수 있을 것으로 기대된다. 더불어 제안하는 부호 설계 알고리즘의 추가적인 성능 지표로서 블록 수  $L$  과 페이딩 계수의 수인  $K$  의 연관성 혹은 트레이드-오프(trade-off) 관계를 보일 수 있을 것으로 생각된다.

## References

- [1] C. Berrou and A. Glavieux, "Near optimum error correcting coding and decoding: Turbo-codes," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, no. 10, pp. 1261-1271, Oct. 1966. (<https://doi.org/10.1109/26.539767>)
- [2] R. C. Bose and D. K. Ray-Chaudhuri, "On a class of error correcting binary group codes," *Inf. Control*, vol. 3, no. 1, pp. 68-79, Mar. 1960. ([https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(60\)90287-4](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(60)90287-4))
- [3] R. C. Bose and D. K. Ray-Chaudhuri, "Further results on error correcting binary group codes," *Inf. Control*, vol. 3, no. 3, pp. 279-290, Sep. 1960. ([https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(60\)90870-6](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(60)90870-6))
- [4] A. Hocquenghem, "Codes correcteurs d'erreurs," *Chiffres*, vol. 2, pp. 147-156, Sep. 1959.
- [5] G. D. Forney Jr., "Convolutional codes I: Algebraic structure," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 16, no. 6, pp. 720-738, Nov. 1970. (<https://doi.org/10.1109/TIT.1970.1054541>)
- [6] R. G. Gallager, "Low-density parity-check codes," *IRE Trans. Inf. Theory*, vol. 8, no. 1, pp. 21-28, Jan. 1962. (<https://doi.org/10.1109/TIT.1962.1057683>)
- [7] C.-U. Baek and J.-W. Jung, "A study on turbo equalization for MIMO systems based on LDPC codes," *J. KICS*, vol. 41, no. 5, pp. 504-511, May 2016.
- [8] S.-Y. Chung, G. D. Forney Jr., T. J. Richardson, and R. Urbanke, "On the design of low-density parity-check codes within 0.0045 dB of the Shannon limit," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 5, no. 2, pp. 58-60, Feb. 2001. (<https://doi.org/10.1109/4234.905935>)
- [9] A. Serener, B. Natarajan, and D. M. Gruenbacher, "Lowering the error floor of optimized short-block-length LDPC-coded OFDM via spreading," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 57, no. 3, pp. 1646-1656, May 2008. (<https://doi.org/10.1109/TVT.2007.907280>)
- [10] G. Liva and M. Chiani, "Protograph LDPC codes design based on EXIT analysis," in *Proc. IEEE GLOBECOM*, pp. 3250-3254, Washington, DC, USA, Nov. 2007. (<https://doi.org/10.1109/GLOCOM.2007.616>)
- [11] Y. Fang, P. Chen, L. Wang, F. C. M. Lau, and K.-K. Wong, "Performance analysis of protograph-based low-density parity-check codes with spatial diversity," *IET Commun.*, vol. 6, no. 17, pp. 2941-2948, Nov. 2012.

- (<https://doi.org/10.1049/jiet-com.2012.0293>)
- [12] A. K. Pradhan, A. Thangaraj, and A. Subramanian, "Construction of near-capacity protograph LDPC code sequences with block-error thresholds," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 64, no. 1, pp. 27-37, Jan. 2016. (<https://doi.org/10.1109/TCOMM.2015.2500234>)
- [13] T. V. Nguyen and H. T. Nguyen, "The design of low-iteration protograph codes for Rayleigh fading channels with spatial diversity," in *Proc. IEEE 7th ICCE*, pp. 165-169, Hue, Vietnam, Jul. 2018. (<https://doi.org/10.1109/CCE.2018.8465765>)
- [14] T. J. Richardson and R. L. Urbanke, "The capacity of low-density parity-check codes under message-passing decoding," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 47, no. 2, pp. 599-618, Feb. 2001. (<https://doi.org/10.1109/18.910577>)
- [15] S. T. Brink, "Convergence behavior of iteratively decoded parallel concatenated codes," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, no. 10, pp. 1727-1737, Nov. 2001. (<https://doi.org/10.1109/26.957394>)
- [16] Y. Fang, G. Bi, and Y. L. Guan, "Design and analysis of root-protograph LDPC codes for non-ergodic block-fading channels," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 14, no. 2, pp. 738-749, Feb. 2015. (<https://doi.org/10.1109/TWC.2014.2359221>)
- [17] Y. Fang, G. Cai, Z. Yang, P. Chen, and G. Han, "Performance of protograph LDPC codes over ergodic Nakagami fading channels," in *Proc. 17th ISCIT*, pp. 1-5, Cairns, QLD, Australia, Sep. 2017. (<https://doi.org/10.1109/ISCIT.2017.8261162>)
- [18] X. Li, P. Chen, Y. Fang, and Z. Xie, "Design of protograph-based LDPC codes for two-user Gaussian multiple access channel," *IEEE Wireless Commun. Lett.*, vol. 11, no. 9, pp. 1990-1994, Sep. 2022. (<https://doi.org/10.1109/LWC.2022.3190531>)
- [19] Q. Chen, Y.-C. He, C. Chen, and L. Zhou, "Optimization of protograph LDPC codes via surrogate channel for unequal power allocation," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 71, no. 3, pp. 1284-1295, Mar. 2023. (<https://doi.org/10.1109/TCOMM.2023.3237845>)
- [20] S. ten Brink, G. Kramer, and A. Ashikhmin, "Design of low-density parity-check codes for modulation and detection," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 52, no. 4, pp. 670-678, Apr. 2004. (<https://doi.org/10.1109/TCOMM.2004.826370>)
- [21] T. V. Nguyen, A. Nosratinia, and D. Divsalar, "The design of rate-compatible protograph LDPC codes," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 60, no. 10, pp. 2841-2850, Oct. 2012. (<https://doi.org/10.1109/TCOMM.2012.081012.110010>)
- [22] M. Franceschini, G. Ferrari, and R. Raheli, "Does the performance of LDPC codes depend on the channel?" *IEEE Trans. Commun.*, vol. 54, no. 12, pp. 2129-2132, Dec. 2006. (<https://doi.org/10.1109/TCOMM.2006.885042>)
- [23] F. Peng, W. Ryan, and R. Wesel, "Surrogate-channel design of universal LDPC codes," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 10, no. 6, pp. 480-482, Jun. 2006. (<https://doi.org/10.1109/LCOMM.2006.1638622>)

정 흥 재 (Hong-Jae Jeong)



2022년 8월 : 경상국립대학교 전자공학과 학사

2022년 9월~현재 : 경상국립대학교 전자공학과 석사과정  
<관심분야> 오류정정부호, 정보이론

[ORCID:0009-0005-8092-9833]

김 재 원 (Jae-Won Kim)



2014년 2월: 서울대학교 전기·  
정보공학부 공학사

2020년 2월: 서울대학교 전기·  
정보공학부 공학박사

2020년 3월~2021년 2월: 삼성  
전자 메모리사업부 Staff

Engineer

2021년 3월~현재: 경상국립대학교 전자공학과 조교수  
<관심분야> 오류정정부호, 정보이론, DNA storage  
[ORCID:0000-0003-1608-5849]